

(I) عموميات:

(1) تعريف:

نقبل الخاصية التالية:

توجد مجموعة نرمز لها بـ \mathbb{C} تحتوي على $\mathbb{R} (\mathbb{R} \subset \mathbb{C})$ وتحقق ما يلي:

- (1) تحتوي المجموعة \mathbb{C} على عنصر غير حقيقي نرمز له بـ i ويحقق $i^2 = -1$
- (2) كل عنصر z من \mathbb{C} يكتب بطريقة وحيدة على شكل:
 $z = a + ib$ مع $a, b \in \mathbb{R}$
- (3) المجموعة \mathbb{C} مزودة بعمليتي الجمع والضرب اللتان تمددان عمليتي الجمع والضرب في \mathbb{R} ولهما نفس الخاصيات.

ملاحظات:

- * $\mathbb{C} = \{z = a + ib / a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$
- * \mathbb{C} تسمى مجموعة الأعداد العقدية وكل عنصر من \mathbb{C} يسمى عدد عقدي.
- * ليكن $z = a + ib$ من \mathbb{C} مع $b \neq 0$ من \mathbb{R} . هذه الكتابة تسمى الشكل الجبري للعدد z .
- العدد a يسمى الجزء الحقيقي لـ z . نكتب $\text{Ré}(z) = a$.
- العدد b يسمى الجزء التخيلي لـ z . نكتب $\text{Im}(z) = b$.
- إذا كان $b = 0$ فإن $z = a \in \mathbb{R}$
- إذا كان $a = 0$ فإن $z = ib$ ونقول z تخيلي صرف: $z \in i\mathbb{R}$.

أمثلة:

- * $z = 2 - 3i$ لدينا $\text{Ré}(z) = 2$ و $\text{Im}(z) = -3$
- * $z = -4i$ لدينا $\text{Ré}(z) = 0$ و $\text{Im}(z) = -4$
- لدينا $z \in i\mathbb{R}$.

(2) قواعد الحساب في \mathbb{C} .

(a) تساوي عددين عقديين:

ليكن $z = a + ib$ و $z' = a' + ib'$ من \mathbb{C} بما أن كل عدد عقدي يكتب بطريقة وحيدة على شكله الجبري. فإن: $z = z' \Leftrightarrow a = a' \text{ و } b = b'$.

$$\text{لدينا } \begin{cases} z = a + ib \\ 0 = 0 + i0 \end{cases} \text{ من } z = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ و } b = 0$$

خاصية:

ليكن $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$ لدينا:
* $a + ib = a' + ib' \Leftrightarrow a = a' \text{ و } b = b'$ هذا يعني:

$$z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Ré}(z) = \text{Ré}(z') \\ \text{Im}(z) = \text{Im}(z') \end{cases}$$

$$a + ib = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ و } b = 0$$

$$z = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Ré}(z) = 0 \\ \text{Im}(z) = 0 \end{cases} \text{ هذا يعني:}$$

(b) بنية $(\mathbb{C}, +, \times)$

- * الجمع تجميعي وتبادلي في \mathbb{C} .
- * الجمع يقبل عنصرا محايدا هو $0: 0 + z = z + 0 = z$
- * كل عنصر z من \mathbb{C} يقبل مقابلا نرمز له بـ $-z$:
 $z + (-z) = (-z) + z = 0$

(* نلخص الخاصيات السابقة بقولنا $(\mathbb{C}, +)$ زمرة تبادلية.

(* الضرب تجميعي وتبادلي في \mathbb{C} .

(* الضرب توزيعي بالنسبة للجمع: $z(z' + z'') = zz' + zz''$

← نلخص الخاصيات السابقة بقولنا:

$(\mathbb{C}, +, \times)$ حلقة تبادلية.

(* العدد 1 هو العنصر المحايد في \mathbb{C} بالنسبة للضرب.

(* كل عنصر من \mathbb{C}^* يقبل مقلوبا نرمز له بـ $\frac{1}{z}$ أو z^{-1}

$$\frac{1}{z} \times z = z \times \frac{1}{z} = 1$$

← نلخص كل الخاصيات السابقة بقولنا: $(\mathbb{C}, +, \times)$ جسم

تبادلي.

خاصية: $(\mathbb{C}, +, \times)$ جسم تبادلي.

(c) الجمع والضرب في \mathbb{C} :

ليكن $z = a + ib$ و $z' = a' + ib'$ من \mathbb{C} مع $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$.

(* لدينا: $z + z' = (a + ib) + (a' + ib')$

$$= a + ib + a' + ib'$$

$$= a + a' + ib + ib'$$

$$= a + a' + i(b + b')$$

(* لدينا: $zz' = (a + ib)(a' + ib')$

$$= aa' + ib'a + iba' - bb'$$

$$= (aa' - bb') + i(b'a + ba')$$

خاصية:

ليكن $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$ لدينا:

$$*(a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i(b + b')$$

$$*(a + ib)(a' + ib') = (aa' - bb') + i(ab' + ba')$$

(d) مقابل ومقلوب عدد عقدي:

(* ليكن $z = a + ib$ من \mathbb{C} .

لنبحث عن z' بحيث $z + z' = 0$

$$\text{نضع } z' = a' + ib'$$

$$z + z' = 0 \Leftrightarrow (a + a') + i(b + b') = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + a' = 0 \\ b + b' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a' = -a \\ b' = -b \end{cases} \text{ لدينا:}$$

$$z' = -a + i(-b)$$

$$\text{إذن } \boxed{-z = -a + i(-b)} \text{ هو: } z = a + ib \text{ مقابل}$$

(* ليكن $z = a + ib$ من \mathbb{C}^*

لنبحث عن z' بحيث $zz' = 1$

$$\text{نضع } z' = a' + ib'$$

$$zz' = 1 \Leftrightarrow (aa' - bb') + i(ab' + ba') = 1$$

$$\text{لدينا: } \Leftrightarrow \begin{cases} aa' - bb' = 1 \\ ba' + b'a = 0 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 + b^2$$

ولدينا $z \in \mathbb{C}^*$ إذن $a \neq 0$ أو $b^2 \neq 0$

إذن $a^2 > 0$ أو $b^2 > 0$ إذن $\Delta \neq 0$

أمثلة:

$$\begin{aligned}\bar{z} &= 2+4i & z &= 2-4i \quad (*) \\ \bar{z} &= -1+i & z &= -1-i \quad (*) \\ \bar{z} &= -2i-4 & z &= 2i-4 \quad (*) \\ \bar{z} &= 5 & z &= 5 \quad (*) \\ \bar{z} &= -2i & z &= 2i \quad (*)\end{aligned}$$

(2) خاصيات:

1- ليكن $z = a+ib$ من \mathbb{C} مع a و b من \mathbb{R} .

$$\bar{z} = a-ib \quad (*)$$

$$z = \bar{z} \Leftrightarrow a+ib = a-ib$$

$$\Leftrightarrow 2ib = 0 \Leftrightarrow 2b = 0 \Leftrightarrow b = 0$$

$$\Leftrightarrow z = a$$

$$\Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$$

(*) ولدينا:

$$\bar{z} = -z \Leftrightarrow a-ib = -a-ib$$

$$\Leftrightarrow 2a = 0$$

$$\Leftrightarrow a = 0$$

$$\Leftrightarrow z = ib$$

$$\Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$$

$$z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$$

$$z = -\bar{z} \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$$

إذن

$$z = z' \Leftrightarrow \bar{z} = \bar{z}' \quad ; \quad \bar{\bar{z}} = z \quad (2)$$

(3) ليكن $z = a+ib$ و $z' = a'+ib'$ من \mathbb{C}

$$z+z' = (a+a') + i(b+b')$$

إذن:

$$\overline{z+z'} = (a+a') - i(b+b')$$

$$= a-ib + a'-ib'$$

$$= \bar{z} + \bar{z}'$$

إذن

$$\overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z}'$$

$$z_1 + z_2 + \dots + z_n = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \dots + \bar{z}_n \quad ; \quad \text{و}$$

(4) ليكن $z = x+iy$ من \mathbb{C} مع x و y من \mathbb{R}

$$\bar{z} = x-iy \quad \text{لدينا:}$$

$$z + \bar{z} = 2x = 2\text{Re}(z)$$

$$z - \bar{z} = 2iy = 2i\text{Im}(z)$$

$$z.\bar{z} = x^2 + y^2$$

(5) ليكن $z = a+ib$ و $z' = a'+ib'$ من \mathbb{C} مع a, b, a', b' من \mathbb{R} .

لدينا:

$$z.z' = (aa' - bb') + i(ab' + ba')$$

$$\bar{z}\bar{z}' = (aa' - bb') - i(ab' + ba')$$

ولدينا:

$$\bar{z}.\bar{z}' = (a-ib)(a'-ib')$$

$$= aa' - ib'a - iba' - bb'$$

$$= (aa' - bb') - i(ab' + ba')$$

$$\bar{z}.\bar{z}' = \overline{z.z'} \quad \text{إذن:}$$

$$\Delta_{a'} = \begin{vmatrix} 1 & -b \\ 0 & a \end{vmatrix} = a \quad \Delta_{b'} = \begin{vmatrix} a & 1 \\ b & 0 \end{vmatrix} = -b$$

$$b' = \frac{-b}{a^2+b^2}; \quad a' = \frac{a}{a^2+b^2} \quad \text{إذن}$$

$$z' = \frac{a}{a^2+b^2} + i \frac{-b}{a^2+b^2} \quad \text{إذن:}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2+b^2} + i \frac{-b}{a^2+b^2} \quad \text{هو: } z = a+ib \quad \text{مقلوب}$$

ملاحظة:

عمليا للحصول على مقلوب عدد عقدي يتبع ما يلي:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)} = \frac{a-ib}{a^2-(ib)^2}$$

$$= \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - i \frac{b}{a^2+b^2}$$

(e) متطابقات هامة:

جميع المتطابقات الهامة التي نعرفها في \mathbb{R} تبقى صحيحة في \mathbb{C} .

(f) قوى العدد i :

$$i^3 = i^2.i = -i \quad i^2 = -1$$

$$i^4 = i^2.i^2 = 1$$

$$i^5 = i^4.i = i$$

ليكن $n \in \mathbb{N}^*$

$$i^n = i^{4k} = (i^4)^k = 1 \quad ; \quad n = 4k \quad (*)$$

$$i^n = i^{4k+1} = i^{4k}.i = i \quad ; \quad n = 4k+1 \quad (*)$$

$$i^n = i^{4k+2} = i^{4k}.i^2 = -1 \quad ; \quad n = 4k+2 \quad (*)$$

$$i^n = i^{4k+3} = i^{4k}.i^3 = -i \quad ; \quad n = 4k+3 \quad (*)$$

$$i^n = \begin{cases} 1; & n = 4k \\ i; & n = 4k+1 \\ -1; & n = 4k+2 \\ -i; & n = 4k+3 \end{cases} \quad \text{إذن:}$$

تمرين تطبيقي:

(*) حساب:

$$z = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{100} = \left(\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2\right)^{50}$$

$$= \left(\frac{(1+i)^2}{2}\right)^{50} = \left(\frac{2i}{2}\right)^{50} = i^{50} = i^{4 \times 12 + 2}$$

$$= (i^4)^{12} \times i^2 = -1$$

ملاحظة:

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{100} = \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{100}$$

$$\frac{1+i}{\sqrt{2}} \neq -\frac{1-i}{\sqrt{2}} \quad \text{و} \quad \frac{1+i}{\sqrt{2}} \neq \frac{1-i}{\sqrt{2}}$$

$$u^n = v^n \Rightarrow u = v \quad \text{أو} \quad u = -v$$

(II) مرافق عدد عقدي:

(1) تعريف:

ليكن $z = a+ib$ من \mathbb{C} مع a و b من \mathbb{R} .

نسمي مرافق العدد z العدد الذي نرمز له ب \bar{z} المعروف بما يلي:

$$\bar{z} = a-ib$$

$$\begin{aligned}
 u &= (a+2i)^n + (a-2i)^n \\
 &= (a+2i)^n + \overline{(a+2i)^n} \\
 &= (a+2i)^n + \overline{(a+2i)^n} = 2\text{Re}((a+2i)^n) \\
 &\quad u \in \mathbb{R} \quad \text{إذن} \\
 \bar{v} &= \overline{(a+2i)^n - (a-2i)^n} \\
 &= \overline{(a+2i)^n} - \overline{(a-2i)^n} \\
 &= (a-2i)^n - (a+2i)^n = -v \\
 &\quad v \in i\mathbb{R} \quad \text{إذن} \quad v = -\bar{v} \\
 &\quad \text{طريقة (2):}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v &= (a+2i)^n - (a-2i)^n \\
 &= (a+2i)^n - \overline{(a+2i)^n} \\
 &= (a+2i)^n - \overline{(a+2i)^n} = 2i\text{Im}((a+2i)^n) \\
 &\quad v \in i\mathbb{R} \quad \text{إذن}
 \end{aligned}$$

تمرين 2

حل في \mathbb{C} المعادلات التالية

$$(1+i)z - 2iz + 1 - i = 3z - i \quad (1)$$

$$(1+i)z - (2i+1)\bar{z} + 1 - i = 3z - i \quad (2)$$

$$iz\bar{z} - (2i+1)\bar{z} + 2 - i = 1 + i \quad (3)$$

III - معيار عدد عقدي: Module d'un complexe

1 - تعريف:

ليكن $z = a + ib$ من \mathbb{C} مع b من \mathbb{R}
 نسمي معيار العدد z العدد الحقيقي الموجب الذي نرمز له ب $|z|$
 والمعروف بما يلي: $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$

أمثلة:

$$|z| = \sqrt{2} \quad : \quad z = 1 - i \quad (*)$$

$$|z| = 5 \quad : \quad z = 3 + 4i \quad (*)$$

$$|z| = 4 \quad : \quad z = -4 \quad (*)$$

$$|z| = 3 \quad : \quad z = 3 \quad (*)$$

$$|z| = 5 \quad : \quad z = -5i \quad (*)$$

ملاحظات:

$$(\forall z \in \mathbb{C}) \quad |z| \in \mathbb{R}^+ \quad (*)$$

(*) إذا كان $z = a \in \mathbb{R}$ قيمة مطلقة $\rightarrow |z| = \sqrt{a^2 + 0^2} = |a|$ معيار.

$$|z| = \sqrt{b^2} = |b| \quad (b \in \mathbb{R}) \quad z = ib \quad (*)$$

(*) ليكن $z = x + iy$ مع x و y من \mathbb{R}

$$|z|^2 = z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$$

(*) $|z|^2 \in \mathbb{R}^+$ و $z^2 \in \mathbb{C}$ لأن $|z|^2 \neq z^2$

(*) ليكن z' من \mathbb{C} بحيث $z' \neq 0$

$$\frac{z}{z'} = \frac{z \bar{z}'}{z' \bar{z}'} = \frac{z \bar{z}'}{|z'|^2} \quad \text{لدينا:}$$

$$\begin{aligned}
 \overline{z \cdot z'} &= \bar{z} \cdot \bar{z}' \\
 \overline{z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n} &= \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \cdot \dots \cdot \bar{z}_n \\
 \overline{z^n} &= (\bar{z})^n \quad (n \in \mathbb{N})
 \end{aligned}$$

إذن:

(6) ليكن z' من \mathbb{C} بحيث $z' \neq 0$

$$\frac{z}{z'} \cdot z' = z \quad \text{لدينا:}$$

$$\frac{z}{z'} \cdot z' = \bar{z} \quad \text{إذن:}$$

$$\left(\frac{z}{z'}\right) \cdot z' = \bar{z} \quad \text{يعني:}$$

$$\left(\frac{z}{z'}\right) = \frac{\bar{z}}{z'} \quad \text{إذن:}$$

$$\begin{aligned}
 \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} &= \frac{\bar{z}}{z'} \\
 \overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} &= \frac{1}{z'}
 \end{aligned}$$

(7) نعتبر الحدودية

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

حيث المعاملات a_i حقيقية. ($a \in \mathbb{R}$)

نفترض أن α حل للمعادلة $P(z) = 0$

لنبين أن $\bar{\alpha}$ حل للمعادلة $P(z) = 0$ يعني $P(\bar{\alpha}) = 0$

لدينا α حل ل $P(z) = 0$ يعني: $P(\alpha) = 0$

$$a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \dots + a_1 \alpha + a_0 = 0 \quad \text{يعني:}$$

$$a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \dots + a_1 \alpha + a_0 = \bar{0} \quad \text{يعني:}$$

$$\overline{a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \dots + a_1 \alpha + a_0} = \overline{0} \quad \text{يعني:}$$

$$\bar{a}_i = a_i \quad \text{إذن} \quad a_i \in \mathbb{R} \quad \text{ولدينا}$$

$$a_n \bar{\alpha}^n + a_{n-1} \bar{\alpha}^{n-1} + \dots + a_1 \bar{\alpha} + a_0 = 0 \quad \text{ومنه:}$$

$$P(\bar{\alpha}) = 0 \quad \text{يعني:}$$

إذن $\bar{\alpha}$ حل للمعادلة $P(z) = 0$.

خاصية:

لنكن $P(z)$ حدودية معاملاتها حقيقية.

إذا كان α حلا للمعادلة $P(z) = 0$ فإن $\bar{\alpha}$ حل ل $P(z) = 0$.

تمارين تطبيقية:

تمرين 1

نعتبر العددين:

$$u = (a+2i)^n + (a-2i)^n, \quad v = (a+2i)^n - (a-2i)^n$$

حيث $a \in \mathbb{R}$

* بين أن u حقيقي و v تخيلي صرف:

$$\bar{u} = \overline{(a+2i)^n + (a-2i)^n} \quad \text{لدينا:}$$

$$= (a+2i)^n + (a-2i)^n$$

$$= \overline{(a+2i)^n} + \overline{(a-2i)^n}$$

$$= (a-2i)^n + (a+2i)^n \quad (a \in \mathbb{R})$$

$$= u$$

$$u \in \mathbb{R} \quad \text{إذن} \quad u = \bar{u}$$

طريقة أخرى:

مثال:

$$\begin{aligned} |z+z'|^2 &= (z+z') \cdot (\overline{z+z'}) \\ &= (z+z') \cdot (\bar{z}+\bar{z}') \\ &= z\bar{z} + z\bar{z}' + z'\bar{z} + z'\bar{z}' \\ &= |z|^2 + z\bar{z}' + z'\bar{z} + |z'|^2 \end{aligned}$$

$$z\bar{z}' + z'\bar{z} \leq 2|z||z'| \quad \text{لنبين أن}$$

$$z\bar{z}' + z'\bar{z} = z\bar{z}' + \overline{z\bar{z}'} = 2\text{Ré}(z\bar{z}') \quad \text{لدينا:}$$

$$\text{Ré}(z\bar{z}') \leq |z\bar{z}'| \quad \text{ونعلم أن:}$$

$$2\text{Ré}(z\bar{z}') \leq 2|z\bar{z}'| \quad \text{يعني:}$$

$$z\bar{z}' + z'\bar{z} \leq 2|z||z'|$$

$$|z|^2 + |z'|^2 + z\bar{z}' + z'\bar{z} \leq |z|^2 + |z'|^2 + 2|z||z'|$$

$$|z+z'|^2 \leq (|z|+|z'|)^2 \quad \text{إذن:}$$

$$|z+z'| \leq |z|+|z'|$$

خاصية:

تمارين تطبيقية:

تمرين 1 أحسب معيار العدد z في الحالات التالية :

$$z = (1-i)^3 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{100} \quad (*)$$

لدينا:

$$|z| = \left| (1-i)^3 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{100} \right|$$

$$= \left| (1-i)^3 \right| \left| \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{100} \right|$$

$$= |1-3| \left| \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right|^{100}$$

$$= \sqrt{3}^2 \cdot 1^{100} = 2\sqrt{2}$$

$$z = \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n \times i}{(3-4i)^2} \quad (*)$$

$$|z| = \frac{\left| \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n \right| \times |i|}{|(3-4i)^2|}$$

$$= \frac{1^n \cdot 1}{25} = \frac{1}{25}$$

$$z \in \mathbb{C} - \left\{ \frac{-i}{2} \right\}$$

تمرين 2 ليكن

$$u = \frac{z+2i}{2z+i} \quad \text{ونعتبر العدد}$$

$$|u|=1 \Leftrightarrow |z|=1 \quad \text{بين أن:}$$

$$\begin{aligned} \frac{a+ib}{c+id} &= \frac{(a+ib)(c-id)}{|c+id|^2} \\ &= \frac{(a+ib)(c-id)}{c^2+d^2} \end{aligned}$$

(2) خاصيات:

-1 ليكن $z = a+ib$ من \mathbb{C}

$$|a| \leq \sqrt{a^2+b^2} \quad \text{إذن} \quad \begin{cases} a^2 \leq a^2+b^2 \\ b^2 \leq a^2+b^2 \end{cases} \quad \text{لدينا}$$

$$\begin{aligned} a &\leq |a| \leq \sqrt{a^2+b^2} \\ b &\leq |b| \leq \sqrt{a^2+b^2} \end{aligned} \quad \text{إذن}$$

خاصية:

$$\text{Ré}(z) \leq |\text{Ré}(z)| \leq |z|$$

$$\text{Im}(z) \leq |\text{Im}(z)| \leq |z|$$

-2 ليكن $z = a+ib$ من \mathbb{C}

$$|z|=0 \Leftrightarrow |z|^2=0$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2=0 \Leftrightarrow a^2=0 \wedge b^2=0$$

$$\Leftrightarrow a=0 \wedge b=0$$

$$(\forall z \in \mathbb{C}) |z|=0 \Leftrightarrow z=0$$

خاصية:

-3 ليكن z' من \mathbb{C}

$$|zz'|^2 = zz' \cdot \overline{zz'} = zz' \cdot \bar{z} \cdot \bar{z}'$$

$$= z \cdot \bar{z} \cdot z' \cdot \bar{z}' = |z|^2 \cdot |z'|^2$$

$$= (|z| \cdot |z'|)^2$$

$$|zz'| = |z| \cdot |z'| \quad \text{إذن:}$$

خاصية:

$$|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$$

$$\left| \prod_{i=1}^n z_i \right| = \prod_{i=1}^n |z_i|$$

$$|z^n| = |z|^n \quad (n \in \mathbb{N})$$

-4 ليكن z' من \mathbb{C} بحيث $z' \neq 0$

$$\left| \frac{z}{z'} \right|^2 = \left(\frac{z}{z'} \right) \left(\frac{\bar{z}}{\bar{z}'} \right)$$

$$= \frac{z}{z'} \cdot \frac{\bar{z}}{\bar{z}'} = \frac{z\bar{z}}{z'\bar{z}'} = \frac{|z|^2}{|z'|^2}$$

$$\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|} \quad \text{إذن:}$$

خاصية:

$z' \neq 0$ من \mathbb{C} بحيث

$$\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|} \quad \left| \frac{1}{z'} \right| = \frac{1}{|z'|}$$

-5 ليكن z' من \mathbb{C}

$$|z+z'| \leq |z|+|z'| \quad \text{لنبين أن}$$

لدينا:

$$M' = S_{(o, \bar{e}_1)}(M) \Leftrightarrow \text{aff}(M'') = \overline{\text{aff}(M)}$$

$$M' = S_0(M) \Leftrightarrow \text{aff}(M') = -\text{aff}(M)$$

3- لتكن M لحقها $M(a, b)$ $z = a + ib$

$$OM = \sqrt{(a-0)^2 + (b-0)^2}$$

لدينا:

$$= \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$$

خاصية

$$OM = |\text{aff}(M)| \quad : \text{لكل } M \text{ من } P$$

تمارين تطبيقية:

1- نعتبر النقطة $A(-3+4i)$. بين أن A تنتمي إلى الدائرة (ξ) التي مركزها o وشعاعها 5.

$$OA = |\text{aff}(A)| = |-3+4i|$$

لدينا:

$$= \sqrt{9+16} = 5$$

إذن: $A \in (\xi)$

2- نعتبر المجموعة: $E = \{M(z) / |z| = 5\}$

حدد طبيعة E وعناصرها المميزة.

$$M(z) \in E \Leftrightarrow |z| = 5$$

$$\Leftrightarrow |z| = \frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow OM = \frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow M \in \xi \left(0, \frac{5}{2}\right)$$

إذن E هي الدائرة (ξ) التي مركزها o وشعاعها $\frac{5}{2}$.

طريقة (2):

لنحدد معادلة ديكارتية ل E :

نضع $z = x + iy$. إذن:

$$M(z) \in E \Leftrightarrow |z| = 5$$

$$\Leftrightarrow |z| = \frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow |z|^2 = \frac{25}{4}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = \frac{25}{4}$$

وهذه معادلة دائرة مركزها o وشعاعها $\frac{5}{2}$

إذن E على $\xi \left(0, \frac{5}{2}\right)$.

(2) لحن متجهة:

(a) تعريف:

لكل متجهة $\bar{u}(a, b)$ العدد $z = a + ib$ يسمى لحن المتجهة \bar{u}

$$\text{aff}(\bar{u}) = z$$

ونكتب $z = a + ib$ ولكل $z = a + ib$ المتجهة $\bar{u}(a, b)$ تسمى صورة العدد z في

المستوى المتجهي v_2 . نكتب $\bar{u}(z)$.

$$|u| = 1 \Leftrightarrow |u|^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow u \cdot \bar{u} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{z+2i}{2z+i} \cdot \frac{\bar{z}+2i}{2\bar{z}+i} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{z+2i}{2z+i} \cdot \frac{\bar{z}-2i}{2\bar{z}-i} = 1$$

$$\Leftrightarrow (z+2i)(\bar{z}-2i) = (2z+i)(2\bar{z}-i)$$

$$\Leftrightarrow z\bar{z} - 2iz + 2i\bar{z} - 4 = 4z\bar{z} - 2iz + 2i\bar{z} + 1$$

$$\Leftrightarrow 3z\bar{z} = 3$$

$$\Leftrightarrow z\bar{z} = 1$$

$$\Leftrightarrow |z|^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow |z| = 1$$

IV- التمثيل الهندسي لعدد عقدي:

نفترض في كل ما يلي أن المستوى منسوب إلى $M, o, \bar{e}_1, \bar{e}_2$

1- لحن نقطة: affixe d'un point

(a) تعريف:

(* لكل نقطة $M(a, b)$ العدد $z = a + ib$ يسمى لحن النقطة M ونكتب: $\text{aff}(M) = z$

(* لكل $z = a + ib$ من C النقطة $M(a, b)$ تسمى صورة z في المستوى العقدي. ونكتب $M(z)$.

أمثلة:

(* صورة العدد $1+i$ هي $A(1, 1)$

(* صورة العدد $1-2i$ هي $B(1, -2)$

(* صورة العدد 2 هي $C(2, 0)$

(* صورة العدد -2 هي $D(-2, 0)$

(* صورة العدد $2i$ هي $E(0, 2)$

(* صورة العدد $-3i$ هي $F(0, -3)$

ملاحظة:

المستوى (P) منسوب إلى $M(o, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$ يسمى مستوى عقدي.

محور الأفاصل مكون من صور لأعداد الحقيقية ويسمى محور حقيقي.

محور الأرتاب مكون من صور الأعداد التخيلية صرف ويسمى محور تخيلي.

$$M \in (o, \bar{e}_1) \Leftrightarrow \text{aff}(M) \in \mathbb{R}$$

$$M \in (o, \bar{e}_2) \Leftrightarrow \text{aff}(M) \in i\mathbb{R}$$

(b) خاصيات:

1- التطبيق $f: C \rightarrow P$ تقابل.

$$z \rightarrow M(z)$$

$$\text{aff}(M) = \text{aff}(M') \Leftrightarrow M = M'$$

2- لتكن $M(z) = a + ib$ مع

لدينا $\bar{z} = a - ib$ إذن $M'(\bar{z})$ هي مماثلة $M(z)$ بالنسبة لمحور الأفاصل.

ولدينا $-z = -a - ib$ إذن $M''(-z)$ هي مماثلة $M(z)$ بالنسبة لأصل المعلم.

(b) خاصيات:

1- التطبيق $f: \mathbb{C} \rightarrow V_2$ تقابل.

$$z \rightarrow \bar{u}(z)$$

$$\bar{u} = \bar{v} \Leftrightarrow \text{aff}(\bar{u}) = \text{aff}(\bar{v})$$

$$z = z' \Leftrightarrow \bar{u}(z) = \bar{v}(z')$$

2- لتكن $\bar{u}(z)$ و $\bar{v}(z')$

مع $z = a + ib$ و $z' = a' + ib'$

لدينا $\bar{u}(a, b)$ و $\bar{v}(a', b')$ إذن $\bar{v}(a', b') = \bar{u}(a, b)$

$$\text{aff}(\bar{u} + \bar{v}) = a + a' + i(b + b')$$

$$= a + ib + a' + ib'$$

إذن:

$$= z + z' = \text{aff}(\bar{u}) + \text{aff}(\bar{v})$$

ليكن $\alpha \in \mathbb{R}$: $\alpha \bar{u}(\alpha a, \alpha b)$

$$\text{aff}(\alpha \bar{u}) = \alpha a + \alpha ib = \alpha(a + ib) = \alpha z$$

$$= \alpha \text{aff}(\bar{u})$$

خاصية:

لتكن \bar{u} و \bar{v} من V_2 و α و β من \mathbb{R}

$$\text{aff}(\bar{u} + \bar{v}) = \text{aff}(\bar{u}) + \text{aff}(\bar{v})$$

لدينا:

$$\text{aff}(\alpha \bar{u}) = \alpha \text{aff}(\bar{u})$$

$$\text{aff}(\alpha \bar{u} + \beta \bar{v}) = \alpha \text{aff}(\bar{u}) + \beta \text{aff}(\bar{v})$$

3- لتكن $\bar{u}(z)$ مع $z = a + ib$ و $\bar{u}(a, b)$

$$\|\bar{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2} = |z| = |\text{aff}(\bar{u})|$$

لدينا:

$$\|\bar{u}\| = |\text{aff}(\bar{u})|$$

لكل \bar{u} من V_2 لدينا:

4- لتكن $M(z)$ و $M'(z')$ مع $z = a + ib$ و $M(a, b)$

$$M'(a', b'): z' = a' + ib'$$

$$\overline{MM'}(a' - a, b' - b)$$

$$\text{aff}(\overline{MM'}) = a' - a + i(b' - b)$$

$$= a' + ib' - (a + ib) = z' - z = \text{aff}(M') - \text{aff}(M)$$

$$MM' = \|\overline{MM'}\| = |\text{aff}(\overline{MM'})|$$

ولدينا:

$$= |\text{aff}(M') - \text{aff}(M)|$$

خاصية:

لكل M و M' من P :

$$\text{aff}(\overline{MM'}) = \text{aff}(M') - \text{aff}(M)$$

$$MM' = |\text{aff}(M') - \text{aff}(M)|$$

تمارين تطبيقية:

تمرين 1 نعتبر النقط $A(i); B(1+2i); C(3+i); D(2)$

بين أن $ABCD$ متوازي أضلاع.

لتبين أن $\overline{AB} = \overline{DC}$

$$\text{aff}(\overline{AB}) = \text{aff}(B) - \text{aff}(A)$$

$$= 1 + 2i - i = 1 + i$$

لدينا:

$$\text{aff}(\overline{DC}) = \text{aff}(C) - \text{aff}(D)$$

$$= 3 + i - 2 = 1 + i$$

$$\text{إذن } \text{aff}(\overline{AB}) = \text{aff}(\overline{DC})$$

ومنه: $\overline{AB} = \overline{DC}$

وبالتالي $ABCD$ متوازي الأضلاع.

تمرين 2

نعتبر النقط $A(1); B(j); C(\bar{j})$ مع $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

بين أن ABC متساوي أضلاع.

$$AB = |\text{aff}(B) - \text{aff}(A)| \quad \text{لدينا:}$$

$$= \left| -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \right| = \left| -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right|$$

$$= \sqrt{\left(\frac{-3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{3}$$

$$AC = |\text{aff}(C) - \text{aff}(A)| = \left| -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \right|$$

$$= \left| -\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right| = \sqrt{\left(\frac{-3}{2}\right)^2 + \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{3}$$

$$BC = |\text{aff}(C) - \text{aff}(B)| = \left| -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right|$$

$$= \left| -2i\frac{\sqrt{3}}{2} \right| = \sqrt{4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{3}$$

$$AB = BC = AC \quad \text{إذن:}$$

ومنه ABC متساوي الأضلاع.

5- ليكن z_1 عدد عقدي صورته A_1

ليكن z_2 عدد عقدي صورته A_2

لنحدد صورة $z_1 + z_2$.

لدينا:

$$z_1 + z_2 = \text{aff}(\overline{OA_1}) + \text{aff}(\overline{OA_2})$$

$$= \text{aff}(\overline{OA_1 + OA_2})$$

لتكن A النقطة بحيث $\overline{OA} = \overline{OA_1} + \overline{OA_2}$

(متوازي أضلاع OA_1AA_2)

$$\text{إذن } z_1 + z_2 = \text{aff}(\overline{OA}) = \text{aff}(A)$$

خاصية:

إذا كان z_1 لحق النقطة A_1 و z_2 لحق A_2 فإن $z_1 + z_2$ هو لحق

النقطة A بحيث $\overline{OA} = \overline{OA_1} + \overline{OA_2}$ أي OA_1AA_2 متوازي أضلاع.

6- ليكن z عدد عقدي صورته A . وليكن $\alpha \in \mathbb{R}$

- لنحدد صورة αz .

$$\alpha z = \alpha \text{aff}(\overline{OA})$$

لدينا

$$= \text{aff}(\alpha \overline{OA})$$

لتكن A' نقطة بحيث $\overline{OA'} = \alpha \overline{OA}$

$$\alpha z = \text{aff}(\overline{OA'}) = \text{aff}(A') \quad \text{لدينا}$$

خاصية:

إذا كان z لحق النقطة M و α عدد حقيقي فإن αz هو لحق M'

$$\text{بحيث } \overline{OM'} = \alpha \overline{OM}$$

خاصية:

لتكن A و B و C 3 نقط ألقاها z_C, z_B, z_A بحيث $A \neq B$
تكون النقط A و B و C مستقيمة إذا وفقط إذا كان:

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$$

تمرين تطبيقي:

لتعتبر النقط $M'(iz), M(z), A(i)$ حيث $z \in \mathbb{C}$
حدد مجموعة النقط M التي تكون من ألقها A و M و M'
مستقيمة.

V- الشكل المثلي لعدد عقدي غير منعدم:

(1) عمدة عدد عقدي غير منعدم

تعريف:

ليكن $z \in \mathbb{C}^*$ و M صورة العدد z .
كل قياس للزاوية الموجهة $(\vec{e}_1, \overline{OM})$
يسمى عمدة للعدد z .

ملاحظة:

إذا كان α قياسا للزاوية $(\vec{e}_1, \overline{OM})$ فإن كل عدد على شكل
 $(k \in \mathbb{Z}) \alpha + 2k\pi$ هو قياس ل $(\vec{e}_1, \overline{OM})$.

إذن: إذا كان α عمدة ل z فإن كل عدد على شكل: $\alpha + 2k\pi$ هو
عمدة ل z

نكتب: $\arg(z) = \alpha + 2k\pi$ أو $\arg(z) = \alpha[2\pi]$

أمثلة:

حدد عمدة لكل من الأعداد: $1+3i; 1-i; 1+i; -2i; 3i; -3; 2$
لتكن A, B, C, D, E, F, G صور لهذه الأعداد على التوالي:
لدينا:

$$*\arg(2) \equiv (\vec{e}_1, \overline{OA})[2\pi] \equiv 0[2\pi]$$

$$*\arg(-3) \equiv (\vec{e}_1, \overline{OB})[2\pi] \equiv \pi[2\pi]$$

$$*\arg(3i) \equiv (\vec{e}_1, \overline{OC})[2\pi] \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$$

$$*\arg(-2i) \equiv (\vec{e}_1, \overline{OD})[2\pi] \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$$

$$*\arg(1+i) \equiv (\vec{e}_1, \overline{OE})[2\pi] \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$$

$$*\arg(1-i) \equiv (\vec{e}_1, \overline{OF})[2\pi] \equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi]$$

$$*\arg(1+3i) \equiv (\vec{e}_1, \overline{OG})[2\pi] \equiv \alpha[2\pi]$$

حيث $\tan \alpha = 3$

(c) تطبيقات:

1- التأويل الهندسي للتطبيق

$$(a \in \mathbb{C}) z \rightarrow z+a$$

نعتبر التطبيق:

$$f: P \rightarrow P$$

$$M(z) \rightarrow M'(z') / z' = z+a$$

لنحدد طبيعة f

لتكن $M(z)$ نقطة من P و $M'(z')$ صورتها.

لدينا: $z' = z+a$

$$\text{aff}(\overline{MM'}) = \text{aff}(M') - \text{aff}(M)$$

$$= z+a - z = a$$

لتكن \vec{u} لبقها a .

$$\text{aff}(\overline{MM'}) = \text{aff}(\vec{u})$$

$$\overline{MM'} = \vec{u}$$

إذن f إزاحة متجهتها $\vec{u}(a)$

خاصية:

ليكن $a \in \mathbb{C}$ التطبيق

$$f: P \rightarrow P$$

$$M(z) \rightarrow M'(z') / z' = z+a$$

إزاحة متجهتها \vec{u} التي لبقها a

2- لبق منتصف قطعة:

لتكن I منتصف $[AB]$ يعني I مرجع $\{(A,1)(B,1)\}$

$$\overline{OI} = \frac{1}{2}(\overline{OA} + \overline{OB})$$

$$\text{aff}(I) = \text{aff}(\overline{OI}) = \text{aff}\left(\frac{1}{2}(\overline{OA} + \overline{OB})\right)$$

$$= \frac{1}{2}(\text{aff}(\overline{OA}) + \text{aff}(\overline{OB}))$$

$$\text{aff}(I) = \frac{1}{2}(\text{aff}(A) + \text{aff}(B))$$

خاصية:

إذا كان I منتصف $[AB]$ فإن:

$$\text{aff}(I) = \frac{1}{2}(\text{aff}(A) + \text{aff}(B))$$

ملاحظة:

إذا كان G مرجع $\{(B, \beta)(A, \alpha)\}$

$$\text{aff}(G) = \frac{1}{\alpha + \beta}(\alpha \text{aff}(A) + \beta \text{aff}(B))$$

3- شرط استقامية ثلاث نقط:

لتكن A و B و C ألقاها z_C, z_B, z_A بحيث $A \neq B$

$$(\text{مستقيمة } C \text{ و } B \text{ و } A) \Leftrightarrow (\exists \alpha \in \mathbb{R}): \overline{AC} = \alpha \overline{AB}$$

$$\Leftrightarrow (\exists \alpha \in \mathbb{R}): \text{aff}(\overline{AC}) = \alpha \text{aff}(\overline{AB})$$

$$\Leftrightarrow (\exists \alpha \in \mathbb{R}): z_C - z_A = \alpha(z_B - z_A)$$

$$\Leftrightarrow (\exists \alpha \in \mathbb{R}): \alpha = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$$

$$\Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$$

تمارين تطبيقية

تمرين 1

حدد الشكل المثلثي للأعداد التالية:

$$z = 5 \quad (*) \quad \text{لدينا } |z| = 5 \text{ و } \arg(z) \equiv 0[2\pi]$$

$$z = [5, 0] \quad \text{إذن}$$

$$z = -3 \quad (*)$$

$$z = [3, \pi] \quad \text{إذن } \arg(z) \equiv \pi[2\pi], |z| = 3$$

$$z = 2i \quad (*)$$

$$z = \left[2, \frac{\pi}{2}\right] \quad \text{إذن } \arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi], |z| = 2$$

$$z = -3i \quad (*)$$

$$z = \left[3, -\frac{\pi}{2}\right] \quad \text{إذن } \arg(z) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi], |z| = 3$$

$$z = 1 + i\sqrt{3} \quad (*)$$

$$|z| = 2$$

$$z = 1 + i\sqrt{3}$$

$$= 2 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$= 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

$$z = \left[2, \frac{\pi}{3}\right]$$

$$|z| = 2 \quad ; \quad z = \sqrt{3} - i \quad (*)$$

$$z = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2} \right) \quad \text{لدينا:}$$

$$= 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

$$= 2 \left(\cos -\frac{\pi}{6} + i \sin -\frac{\pi}{6} \right)$$

$$z = \left[2, -\frac{\pi}{6}\right]$$

$$z = -\sqrt{2} + \sqrt{6}i \quad (*)$$

$$z = 2\sqrt{2} \left(\frac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}i \right)$$

$$= 2\sqrt{2} \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 2\sqrt{2} \left(-\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

$$= 2\sqrt{2} \left(\cos \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) \right)$$

$$z = \left[2\sqrt{2}, \frac{2\pi}{3}\right]$$

ملاحظة:

$$z \in \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow \arg(z) \equiv 0[2\pi] \quad (*)$$

$$z \in \mathbb{R}_-^* \Leftrightarrow \arg(z) \equiv \pi[2\pi] \quad (*)$$

$$z \in i\mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow \arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \quad (*)$$

$$z \in i\mathbb{R}_-^* \Leftrightarrow \arg(z) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi] \quad (*)$$

$$z \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow \arg(z) \equiv k\pi (k \in \mathbb{Z}) \quad (*)$$

$$z \in \mathbb{R}^- \Leftrightarrow \arg(z) \equiv \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (*)$$

(2) الشكل المثلثي لعدد عقدي غير منعدم:

تعريف:

ليكن $z \in \mathbb{C}$. لتكن θ عمدته و r معياره: $|z| = r$

$$\arg(z) \equiv \theta[2\pi]$$

لتكن M صورة z .

$$\text{لدينا } OM = |\text{aff}(M)| = |z| = r$$

لدينا أحداثيات M :

$$M(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

$$\text{إذن } \text{aff}(M) = r \cos \theta + i r \sin \theta$$

$$\text{إذن } \text{aff}(M) = z$$

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad \text{إذن}$$

خاصية وتعريف:

كل عدد عقدي غير منعدم z يكتب بطريقة وحيدة على

شكل $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ حيث $|z| = r$ و $\theta \equiv \arg(z)[2\pi]$

وهذه الكتابة تسمى الشكل المثلثي للعدد z . ونكتب $z = [r, \theta]$

ملاحظة:

$z = 0$ ليست له لا عمدة ولا شكل مثلثي.

$z = [r, \theta]$ إذا كان M صورة z فإن (r, θ) يسمى زوج

الأحداثيات القطبية ل M .

$$[r, \theta] = [r', \theta'] \Leftrightarrow \begin{cases} r = r' \\ \theta \equiv \theta'[2\pi] \end{cases} \quad (*)$$

$$z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = |z'| \\ \arg(z) = \arg(z')[2\pi] \end{cases} \quad \text{يعني:}$$

$z = a + ib$ ليكن $z \in \mathbb{C}^*$ للحصول على ش المثلثي ل z نتبع ما يلي

$$z = a + ib = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + i \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$$

$$\frac{a^2}{a^2 + b^2} + \frac{b^2}{a^2 + b^2} = 1 \quad \text{ولدينا}$$

$$\text{إذن يوجد } \alpha \text{ بحيث: } \cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ و } \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\text{إذن: } z = \sqrt{a^2 + b^2} (\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

خاصية:

$z = a + ib$ من \mathbb{C}^* الشكل المثلثي ل z هو $z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$

$$\text{حيث } r = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ و } \cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ و } \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$|z| = \left| 2 \cos \frac{\alpha}{2} \right| \quad \text{لدينا}$$

- لندرس إشارة $\cos \frac{\alpha}{2}$ في $[0, 2\pi]$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = 0 \Leftrightarrow \cos \frac{\alpha}{2} = \cos \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \pi + 2k\pi$$

ولدينا $\alpha \in [0, 2\pi]$ إذن: $\alpha = \pi$

- إذا كان $\alpha \in [0, \pi[$ فإن $\cos \frac{\alpha}{2} > 0$ إذن $|z| = 2 \cos \frac{\alpha}{2}$

$$z = 2 \cos \frac{\alpha}{2} \left(\cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2} \right) \quad \text{إذن}$$

$$z = \left[2 \cos \frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2} \right] \quad \text{ومنه}$$

$$|z| = 2 \cos \frac{\alpha}{2} \quad \text{و} \quad \arg(z) \equiv \frac{\alpha}{2} [2\pi]$$

- إذا كان $\alpha \in]\pi, 2\pi]$ فإن $\cos \frac{\alpha}{2} < 0$ إذن $|z| = -2 \cos \frac{\alpha}{2}$

$$z = 2 \cos \frac{\alpha}{2} \left(\cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2} \right)$$

$$= -2 \cos \frac{\alpha}{2} \left(-\cos \frac{\alpha}{2} - i \sin \frac{\alpha}{2} \right)$$

$$= -2 \cos \frac{\alpha}{2} \left(\cos \left(\pi + \frac{\alpha}{2} \right) + i \sin \left(\pi + \frac{\alpha}{2} \right) \right)$$

$$z = \left[-2 \cos \frac{\alpha}{2}, \pi + \frac{\alpha}{2} \right]$$

$$\text{إذن } |z| = 2 \cos \frac{\alpha}{2} \quad \text{و} \quad \arg(z) \equiv \left(\pi + \frac{\alpha}{2} \right) [2\pi]$$

- إذا كان $\alpha = \pi$ فإن $|z| = 0$ يعني $z = 0$

إذن z ليس له عمدة.

3) عمدة العدد z

$$\text{ليكن } z = [r, \theta]$$

$$\bar{z} = \overline{[r, \theta]} = \overline{r(\cos \theta + i \sin \theta)} \quad \text{* لدينا:}$$

$$= r(\cos \theta - i \sin \theta)$$

$$= r(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta))$$

$$\bar{z} = [r, -\theta] \quad \text{إذن}$$

$$\arg(\bar{z}) = -\theta [2\pi]$$

$$= -\arg(z) [2\pi]$$

$$-z = -r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad \text{* ولدينا:}$$

$$= r(-\cos \theta - i \sin \theta)$$

$$= r(\cos(\pi + \theta) + i \sin(\pi + \theta))$$

$$-z = [r, \pi + \theta]$$

$$\arg(-z) = \arg(z) + \pi [2\pi]$$

خاصية:

$$\arg(\bar{z}) = -\arg(z) [2\pi]; \quad \overline{[r, \theta]} = [r, -\theta] \quad (*)$$

$$\arg(-z) = \arg(z) + \pi [2\pi]; \quad -[r, \theta] = [r, \pi + \theta] \quad (*)$$

$$|z| = 2\sqrt{2} \quad z = -\sqrt{6} - i\sqrt{2} \quad (*)$$

$$z = 2\sqrt{2} \left(\frac{-\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} - i \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \right)$$

$$= 2\sqrt{2} \left(\frac{-\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2} \right)$$

$$= 2\sqrt{2} \left(-\cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

$$= 2\sqrt{2} \left(\cos \left(\pi + \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\pi + \frac{\pi}{6} \right) \right)$$

$$z = \left[2\sqrt{2}, \frac{7\pi}{6} \right]$$

إذن:

$$\alpha \in \mathbb{R} \quad \text{حيث } z = \sin \alpha + i \cos \alpha \quad (*)$$

لدينا $|z| = 1$

$$z = \sin \alpha + i \cos \alpha$$

$$= \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)$$

$$z = \left[1, \frac{\pi}{2} - \alpha \right]$$

$$|z| = 1 \quad \text{لدينا } z = -\sin \alpha - i \cos \alpha \quad (*)$$

$$z = -\sin \alpha - i \cos \alpha$$

$$= -\cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)$$

$$= \cos \left(\pi + \frac{\pi}{2} - \alpha \right) + i \sin \left(\pi + \frac{\pi}{2} - \alpha \right)$$

$$= \cos \left(\frac{3\pi}{2} - \alpha \right) + i \sin \left(\frac{3\pi}{2} - \alpha \right)$$

$$z = \left[1, \frac{3\pi}{2} - \alpha \right]$$

إذن:

$$\alpha \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^* \quad \text{مع } z = a(\cos \alpha + i \sin \alpha) \quad (*)$$

$$|z| = |a| \quad \text{لدينا}$$

إذا كان $a > 0$ فإن $|z| = a$

$$z = a(\cos \alpha + i \sin \alpha) \quad \text{ولدينا}$$

$$z = [a, \alpha] \quad \text{إذن}$$

إذا كان $a < 0$ فإن $|z| = -a$

$$z = a(\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

$$= -a(-\cos \alpha - i \sin \alpha)$$

$$= -a(\cos(\pi + \alpha) + i \sin(\pi + \alpha))$$

$$z = [-a, \pi + \alpha]$$

إذن:

ملاحظة:

إذا كان $a > 0$ فإن $z = a(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ مع $z = [a, \alpha]$

تمرين 2

$$z = 1 + \cos \alpha + i \sin \alpha \quad \text{مع } \alpha \in [0, 2\pi]$$

حدد معيار وعمدة z

$$z = 1 + \cos \alpha + i \sin \alpha$$

$$= 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} + 2i \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$$

$$= 2 \cos \frac{\alpha}{2} \left(\cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2} \right)$$

$$\begin{aligned}\arg\left(\frac{z}{z'}\right) &\equiv \arg\left(z \times \frac{1}{z'}\right)[2\pi] \\ &\equiv \arg(z) + \arg\left(\frac{1}{z'}\right)[2\pi] \\ &\equiv \arg(z) - \arg(z')[2\pi]\end{aligned}$$

خاصية:

$$\begin{aligned}\frac{[r, \theta]}{[r', \theta']} &= \left[\frac{r}{r'}, \theta - \theta'\right] \\ \arg\left(\frac{z}{z'}\right) &\equiv \arg(z) - \arg(z')[2\pi]\end{aligned}$$

تمارين تطبيقية:

تمرين 1

حدد الشكل المثلثي ل z في الحالات التالية:

$$z = 2i \frac{(1-i)^4 (\sqrt{3}+i)}{5(\sqrt{3}-3i)^2}$$

$$* 2i = \left[2, \frac{\pi}{2}\right] \quad \text{لدينا:}$$

$$\begin{aligned}1-i &= \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

$$* 1-i = \left[\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}\right]$$

$$\begin{aligned}\sqrt{3}+i &= 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2}\right) \\ &= 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)\end{aligned}$$

$$* \sqrt{3}+i = \left[2, \frac{\pi}{6}\right]$$

$$* 5 = [5, 0]$$

$$* \sqrt{3}-3i = 2\sqrt{3} \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\sqrt{3} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\sqrt{3}-3i = \left[2\sqrt{3}, -\frac{\pi}{3}\right]$$

إذن:

$$\begin{aligned}z &= \frac{\left[2, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}\right]^4 \times \left[2, \frac{\pi}{6}\right]}{[5, 0] \times \left[2\sqrt{3}, -\frac{\pi}{3}\right]^2} = \frac{\left[2, \frac{\pi}{2}\right] \times [4, -\pi] \times \left[2, \frac{\pi}{6}\right]}{[5, 0] \times \left[12, -2\frac{\pi}{3}\right]} \\ &= \frac{\left[16, -\frac{\pi}{3}\right]}{\left[60, -2\frac{\pi}{3}\right]} = \left[\frac{16}{60}, \frac{\pi}{3}\right]\end{aligned}$$

تمرين 2

ليكن $z = \frac{z_1}{z_2}$, $z_2 = 1+i$, $z_1 = 1+i\sqrt{3}$
- حدد الشكل المثلثي لكل من z_1 و z_2

4 العدة والعمليات في C

(a) الجداء:

ليكن $z' = [r', \theta']$ و $z = [r, \theta]$

$$\begin{aligned}zz' &= r(\cos \theta + i \sin \theta) r'(\cos \theta' + i \sin \theta') \\ &= rr'[(\cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta') + i(\cos \theta \sin \theta' + \sin \theta \cos \theta')] \\ &= rr'(\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta'))\end{aligned}$$

$$zz' = [rr', \theta + \theta'] \quad \text{إذن}$$

$$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')[2\pi]$$

خاصية:

$$[r, \theta] \times [r', \theta'] = [rr', \theta + \theta'] \quad (*)$$

$$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')[2\pi] \quad (*)$$

ملاحظة:

$$\prod_{i=1}^n [r_i, \theta_i] = \left[\prod_{i=1}^n r_i, \sum_{i=1}^n \theta_i\right] \quad (*)$$

$$\arg\left(\prod_{i=1}^n z_i\right) = \sum_{i=1}^n \arg(z_i)[2\pi] \quad (*)$$

$$(n \in \mathbb{N}) [r, \theta]^n = [r^n, n\theta] \quad (*)$$

$$(n \in \mathbb{N}) \arg(z^n) = n \arg(z) [2\pi] \quad (*)$$

(b) المقلوب: ليكن $z = [r, \theta]$

$$\frac{1}{[r, \theta]} = \frac{1}{r(\cos \theta + i \sin \theta)} = \frac{1}{r} \left(\frac{\cos \theta - i \sin \theta}{1}\right)$$

$$= \frac{1}{r} (\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)) = \left[\frac{1}{r}, -\theta\right] = \frac{1}{z}$$

$$\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z)[2\pi]$$

خاصية:

$$\frac{1}{[r, \theta]} = \left[\frac{1}{r}, -\theta\right] \quad (*)$$

$$\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z)[2\pi] \quad (*)$$

(n \in \mathbb{N}): ملاحظة:

$$[r, \theta]^{-n} = \frac{1}{[r, \theta]^n} = \frac{1}{[r^n, n\theta]} = \left[\frac{1}{r^n}, -n\theta\right]$$

$$[r, \theta]^{-n} = [r^{-n}, -n\theta] \quad \text{إذن}$$

$$\arg(z^{-n}) \equiv -n \arg(z)[2\pi]$$

$$(\forall n \in \mathbb{Z}) [r, \theta]^n = [r^n, n\theta]$$

$$\arg(z^n) \equiv n \arg(z)[2\pi]$$

إذن:

(c) الخارج:

$$\frac{[r, \theta]}{[r', \theta']} = [r, \theta] \times \frac{1}{[r', \theta']}$$

$$= [r, \theta] \cdot \left[\frac{1}{r'}, -\theta'\right] = \left[\frac{r}{r'}, \theta - \theta'\right]$$

لدينا:

$$\begin{aligned}(\overline{u}, \overline{v}) &\equiv (\overline{OA}, \overline{OB})[2\pi] \\ &\equiv (\overline{OA}, \overline{e_1}) + (\overline{e_1}, \overline{OB})[2\pi] \\ &\equiv (\overline{e_1}, \overline{OB}) - (\overline{e_1}, \overline{OA})[2\pi] \\ &\equiv \arg(\text{aff}(B)) - \arg(\text{aff}(A))[2\pi] \\ &\equiv \arg(z_B) - \arg(z_A)[2\pi] \\ &\equiv \arg(\text{aff}(\overline{v})) - \arg(\text{aff}(\overline{u}))[2\pi]\end{aligned}$$

خاصية:

$$(\overline{u}, \overline{v}) \equiv \arg(\text{aff}(\overline{v})) - \arg(\text{aff}(\overline{u}))[2\pi]$$

حالات خاصة:

$$(\overline{e_1}, \overline{AB}) \equiv \arg(\text{aff}(\overline{AB})) - \arg(1)[2\pi] \quad (*)$$

$$\equiv \arg(\text{aff}(B) - \text{aff}(A))$$

$$\equiv \arg(z_B - z_A)[2\pi]$$

$$(\overline{e_1}, \overline{AB}) \equiv \arg(z_B - z_A)[2\pi]$$

$$(\overline{AB}, \overline{CD}) \equiv \arg(\text{aff}(\overline{CD})) - \arg(\text{aff}(\overline{AB}))[2\pi] \quad (*)$$

$$\equiv \arg(z_D - z_C) - \arg(z_B - z_A)[2\pi]$$

$$(\overline{AB}, \overline{CD}) \equiv \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)[2\pi]$$

تمارين تطبيقي:

تمرين 1

نعتبر النقط $A(i), B(z_1), C(z_2)$ حيث z_1 و z_2 من \mathbb{C} يحققان:

$$z_2 = iz_1 + i + 1$$

بين أن المثلث ABC قائم الزاوية ومتساوي الساقين في A .

$$(\overline{AB}, \overline{AC}) \equiv \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)[2\pi] \quad \text{لدينا:}$$

ولدينا:

$$\begin{aligned}\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} &= \frac{iz_1 + i + 1 - i}{z_1 - i} \\ &= \frac{iz_1 + 1}{z_1 - i} \\ &= \frac{i(z_1 - i)}{z_1 - i} = i = \left[1, \frac{\pi}{2}\right]\end{aligned}$$

ومنه:

$$\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv \arg(i)[2\pi] \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$$

$$(\overline{AB}, \overline{AC}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \quad \text{وبالتالي:}$$

إذن ABC قائم الزاوية ومتساوي الساقين في A .

تمرين 2

حدد وانشئ المجموعة

$$E = \left\{ M(z) / \arg(z - i) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \right\}$$

- استنتج $\sin \frac{\pi}{12}$ و $\cos \frac{\pi}{12}$

لدينا

$$z_1 = 1 + i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= 2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i\sin \frac{\pi}{3}\right)$$

$$z_1 = \left[2, \frac{\pi}{3}\right]$$

$$z_2 = 1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= \sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i\sin \frac{\pi}{4}\right)$$

$$z_2 = \left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right]$$

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\left[2, \frac{\pi}{3}\right]}{\left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right]} = \left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{12}\right]$$

(*) لدينا: $z = \left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{12}\right]$

$$z = \sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{12} + i\sin \frac{\pi}{12}\right) \quad (1)$$

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 + i} = \frac{(1 + i\sqrt{3})(1 - i)}{2}$$

ولدينا

$$= \frac{1 - i + i\sqrt{3} + \sqrt{3}}{2} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} + i\left(\frac{\sqrt{3} - 1}{2}\right) = z \quad (2)$$

من (1) و (2) نستنتج أن:

$$\begin{cases} \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{12} = \frac{4\sqrt{3}}{2} \\ \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \\ \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{cases} \quad \text{يعني} \quad \begin{cases} \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}} \\ \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} \end{cases} \quad \text{أي}$$

ملاحظة: $[r, \alpha] = [r, \alpha + 2k\pi]$

تمرين

$$z = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{نعتبر العدد}$$

(1) أحسب z^{2000}

(2) حدد قيم العدد النسبي n التي يكون من أجلها $z^n \in \mathbb{R}$

(3) حدد حسب قيم العدد الطبيعي n z^n .

(5) زاوية متجهتين:

لتكن \vec{u} و \vec{v} متجهتين غير منعدمتين لحقاهما على التوالي z_u و z_v

لتكن B و A النقطتين بحيث $\vec{OB} = \vec{v}$ و $\vec{OA} = \vec{u}$

$$\text{aff}(A) = \text{aff}(\overline{OA}) = \text{aff}(\vec{u}) = z_u$$

$$\text{aff}(B) = \text{aff}(\overline{OB}) = \text{aff}(\vec{v}) = z_v$$

(b) خاصيات:

$$\begin{aligned} e^{i\theta} \cdot e^{i\theta'} &= e^{i(\theta+\theta')} & (*) \\ \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} &= e^{i(\theta-\theta')} & (*) \\ \frac{1}{e^{i\theta}} &= e^{-i\theta} & (*) \\ (\forall n \in \mathbb{Z}) (e^{i\theta})^n &= e^{in\theta} & (*) \\ (\overline{e^{i\theta}}) &= e^{-i\theta} & (*) \\ -e^{i\theta} &= e^{i\pi} \cdot e^{i\theta} = e^{i(\pi+\theta)} & (*) \end{aligned}$$

(8) صيغتا أولير Euler:

(1) $e^{ix} = \cos x + i \sin x$: ليكن $x \in \mathbb{R}$

$$e^{-ix} = \cos(-x) + i \sin(-x)$$

(2) $e^{-ix} = \cos x - i \sin x$

من (1) + (2) نستنتج أن:

$$2 \cos x = e^{ix} + e^{-ix}$$

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) \quad \text{إذن}$$

ومن (1) - (2) نستنتج أن:

$$2i \sin x = e^{ix} - e^{-ix}$$

$$\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) \quad \text{إذن}$$

خاصية:

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$$

$$\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$$

ملاحظة:

$$e^{ix} + e^{-ix} = 2 \cos x$$

$$e^{ix} - e^{-ix} = 2i \sin x$$

تطبيق: اخطاط حدودية مثلثية:

يعني كتابتها بدلالة $\cos x$ و $\sin x$.

تمرين:

اخطاط الحدودية: $P(x) = \cos^3 x \sin^3 x$

$$\begin{cases} \cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) \\ \sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) \end{cases} \quad \text{نعلم أن}$$

إذن:

(6) صيغة موائر وتطبيقاتها:

$$[1, \theta]^n = [1, n\theta] \quad n \in \mathbb{Z} \text{ و } \theta \in \mathbb{R} \text{ ليكن}$$

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta) \quad \text{يعني:}$$

خاصية:

$$(\forall \theta \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{Z})$$

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

تطبيقات:

حساب $\cos(nx)$ و $\sin(nx)$ بدلالة $\cos x$ و $\sin x$

$$(\cos nx + i \sin nx) = (\cos x + i \sin x)^n \quad \text{- لدينا:}$$

$$= \sum_{k=0}^n C_n^k (\cos x)^k \cdot (i \sin x)^{n-k}$$

$$\cos(nx) = \operatorname{Re} \left[\sum_{k=0}^n C_n^k (\cos x)^k \cdot (i \sin x)^{n-k} \right] \quad \text{ومنه:}$$

$$\sin(nx) = \operatorname{Im} \left[\sum_{k=0}^n C_n^k (\cos x)^k \cdot (i \sin x)^{n-k} \right]$$

مثال:

احسب $\cos 5x$ و $\sin 5x$ بدلالة $\cos x$ و $\sin x$

$$\cos 5x + i \sin 5x = (\cos x + i \sin x)^5$$

$$= \cos^5 x + 5 \cos^4 x (i \sin x) + 10 \cos^3 x (i \sin x)^2$$

$$+ 10 \cos^2 x (i \sin x)^3 + 5 \cos x (i \sin x)^4 + (i \sin x)^5$$

$$= \cos^5 x + 5 \cos^4 x (i \sin x) - 10 \cos^3 x \sin^2 x$$

$$- 10i \cos^2 x \sin^3 x + 5 \cos x \sin^4 x + i \sin^5 x$$

$$= (\cos^5 x - 10 \cos^3 x \sin^2 x + 5 \cos x \sin^4 x)$$

$$+ i(5 \cos^4 x \sin x - 10 \cos^2 x \sin^3 x + \sin^5 x)$$

ومنه:

$$\cos 5x = (\cos^5 x - 10 \cos^3 x \sin^2 x + 5 \cos x \sin^4 x)$$

$$\sin 5x = (5 \cos^4 x \sin x - 10 \cos^2 x \sin^3 x + \sin^5 x)$$

(7) الترميز الأسّي لعدد عقدي:

(a) الترميز:

نرمز للعدد $[1, \theta]$ بالرمز: $e^{i\theta}$

$$e^{i\theta} = [1, \theta] = \cos \theta + i \sin \theta$$

ملاحظة:

$$[r, \theta] = r(\cos \theta + i \sin \theta) = r e^{i\theta}$$

$$[r, \theta] = r e^{i\theta}$$

أمثلة:

$$*) e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$*) e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$$

$$*) e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1$$

$$*) \sqrt{3} + i = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = 2 e^{i\frac{\pi}{6}}$$

VI- الجذور النونية لعدد عقدي غير منعدم:

(1) تعريف:

ليكن z من \mathbb{C} و $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$
 نسمي الجذر النوني أو الجذر من الرتبة n للعدد z كل عدد عقدي z يحقق $z^n = Z$

أمثلة:

$$(i)^2 = 1, \quad i^2 = -1 \quad (*)$$

كل من i و $-i$ جذر من الرتبة 2 للعدد 1.

$$(-i)^4 = 1, \quad i^4 = 1, \quad (-1)^4 = 1, \quad 1^4 = 1 \quad (*)$$

الأعداد $-i, i, -1, 1$ جذور من الرتبة 4 للعدد 1.

(2) تحديد الجذور من الرتبة n .

ليكن: $z = re^{i\theta}$ مع $r > 0$

نضع $z = ee^{iq}$ مع $q > 0$

$$z^n = Z \Leftrightarrow e^n e^{in\ell} = re^{i\theta} \quad \text{لدينا:}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^n = r \\ n\ell \equiv \theta [2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e = \sqrt[n]{r} \\ \ell \equiv \frac{\theta}{n} \left[\frac{2\pi}{n} \right] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ell = \sqrt[n]{r} \\ \ell = \frac{\theta}{n} + \frac{2k}{n} \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ell = \sqrt[n]{r} \\ \ell \equiv \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} [2\pi] / k \in \{0, 1, 2, \dots, (n-1)\} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow z = \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} / k \in \{0, 1, 2, \dots, (n-1)\}$$

إذن هناك n جذر نوني.

خاصية:

ليكن $Z = re^{i\theta}$ (مع $r > 0$) و $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$
 العدد Z يقبل n جذر نوني. وهذه الجذور النونية هي الأعداد:

$$z_k = \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} / k \in \{0, 1, 2, \dots, (n-1)\}$$

مثال:

لنحدد الجذور من الرتبة 3 للعدد $Z = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$

- لنحدد الشكل المتلقي ل Z

$$Z = -\sqrt{2} - i\sqrt{2} \quad \text{لدينا:}$$

$$= 2 \left(\frac{-\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$= 2 \left(\cos \left(\pi + \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(\pi + \frac{\pi}{4} \right) \right)$$

$$Z = 2e^{i\frac{5\pi}{4}} \quad \text{إذن:}$$

إذن الجذور من الرتبة 3 ل Z هي الأعداد:

$$\begin{aligned} P(x) &= \frac{1}{8} (e^{ix} + e^{-ix})^3 \times \left(\frac{-1}{4} (e^{ix} + e^{-ix})^2 \right) \\ &= \frac{-1}{32} (e^{ix} + e^{-ix}) (e^{ix} + e^{-ix})^2 (e^{ix} + e^{-ix})^2 \\ &= \frac{-1}{32} (e^{ix} + e^{-ix}) (e^{2ix} + e^{-2ix})^2 \\ &= \frac{-1}{32} (e^{ix} + e^{-ix}) (e^{4ix} + e^{-4ix} - 2) \\ &= \frac{-1}{32} (e^{i5x} + e^{-3ix} - 2e^{ix} + e^{3ix} + e^{-5ix} + -2e^{-ix}) \\ &= \frac{-1}{32} [(e^{i5x} + e^{-i5x}) + (e^{3ix} + e^{-3ix}) - 2(e^{ix} + e^{-ix})] \\ &= \frac{-1}{32} (2\cos(5x) + 2\cos(3x) - 4\cos(x)) \end{aligned}$$

$$P(x) = \frac{-1}{16} (\cos(5x) + \cos(3x) - 2\cos(x)) \quad \text{إذن}$$

ملاحظة: طريقة البحث عن الشكل المتلقي لمجموع عددين لعقديين لهما نفس المعيار:

طريقة 1

$$\begin{aligned} e^{i\alpha} + e^{i\beta} &= (\cos \alpha + \cos \beta) + i(\sin \alpha + \sin \beta) \\ &= 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) + i 2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \\ &= 2 \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \left[\cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{i\alpha} - e^{i\beta} &= (\cos \alpha - \cos \beta) + i(\sin \alpha - \sin \beta) \\ &= -2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) + i 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \\ &= 2 \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \left[-\sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) + i \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \right] \end{aligned}$$

طريقة 2

$$\begin{aligned} *) e^{i\alpha} + e^{i\beta} &= e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} \left(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} + e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}} \right) \\ &= e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} \times 2 \cos \frac{\alpha-\beta}{2} \\ &= 2 \cos \frac{\alpha-\beta}{2} \left(\cos \frac{\alpha+\beta}{2} + i \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \right) \\ *) e^{i\alpha} - e^{i\beta} &= e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} \left(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} - e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}} \right) \\ &= e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} \times 2i \sin \frac{\alpha-\beta}{2} \\ &= 2 \sin \frac{\alpha-\beta}{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} \\ &= 2 \sin \frac{\alpha-\beta}{2} \cdot e^{i\left(\frac{\alpha+\beta+\pi}{2}\right)} \\ &= 2 \sin \frac{\alpha-\beta}{2} \left(\cos \frac{\alpha+\beta+\pi}{2} + i \sin \frac{\alpha+\beta+\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

$$w_0 = e^{i0} = 1$$

$$w_1 = e^{i\pi} = -1$$

(2) الجذور من الرتبة 3 للوحدة هي الأعداد:

$$w_k = e^{\frac{i2k\pi}{3}} / k \in \{0,1,2\}$$

هذه الجذور هي:

$$w_0 = e^{i0} = 1$$

$$w_1 = e^{\frac{i2\pi}{3}} = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$$

$$= \cos \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right)$$

$$= -\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$$

$$w_1 = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} = j \quad j = e^{\frac{i2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$w_2 = e^{\frac{i4\pi}{3}} = \cos \left(\pi + \frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(\pi + \frac{\pi}{3} \right)$$

$$= -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

الجذور المكعبة ل 1 هي $\bar{j}, j, 1$

إن

$$\begin{aligned} j^2 = \bar{j} & ; & j^3 = 1 & (*) \\ 1 + j + j^2 = 0 & \text{إن} & 1 + j + \bar{j} = 0 & (*) \\ j^2 = -1 - j & (*) \end{aligned}$$

(3) الجذور من الرتبة 4 ل 1:

$$w_k = e^{\frac{i2k\pi}{4}} = e^{\frac{ik\pi}{2}} / k \in \{0,1,2,3\}$$

هذه الجذور هي:

$$w_0 = e^{i0} = 1$$

$$w_1 = e^{\frac{i\pi}{2}} = i$$

$$w_2 = e^{i\pi} = -1$$

$$w_3 = e^{\frac{i3\pi}{2}} = e^{-\frac{i\pi}{2}} = -i$$

الجذور من الرتبة 4 ل 1 هي: $-i, i, -1, 1$

(b) **خاصيات:**

-1 لتكن w_k الجذور من الرتبة n ل 1:

$$w_k = e^{\frac{i2k\pi}{n}}$$

لدينا:

$$= \left(e^{\frac{i2\pi}{n}} \right)^k = w_1^k$$

خاصية

لتكن w_k الجذور النونية لـ 1:

$$w_1 = e^{\frac{i2\pi}{n}} \quad \text{مع} \quad \forall k \in \{0,1,\dots,(n-1)\} \quad w_k = w_1^k$$

إن الجذور من الرتبة n لـ 1 هي: $1, w_1, w_1^2, w_1^3, \dots, w_1^{n-1}$

$$z_k = \sqrt[3]{2} \cdot e^{\frac{i5\pi + 2k\pi}{3}} \quad k \in \{0,1,2\}$$

$$z_0 = \sqrt[3]{2} \cdot e^{\frac{i5\pi}{12}}$$

$$z_1 = \sqrt[3]{2} \cdot e^{\frac{i3\pi}{12}}$$

$$z_2 = \sqrt[3]{2} \cdot e^{\frac{i21\pi}{12}} = \sqrt[3]{2} \cdot e^{\frac{i7\pi}{4}}$$

$$= \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right)$$

$$= \sqrt[3]{2} \left(\cos \left(2\pi - \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(2\pi - \frac{\pi}{4} \right) \right)$$

$$z_2 = \sqrt[3]{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

(3) صور الجذور النونية:

ليكن $Z = re^{i\theta}$ ($r > 0$)

الجذور النونية ل Z هي الأعداد

$$z_k = \sqrt[n]{r} \cdot e^{\frac{i\theta + 2k\pi}{n}} / k \in \{0,1,2,\dots,(n-1)\}$$

لتكن M_0, M_1, \dots, M_{n-1} صور z_0, z_1, \dots, z_{n-1} على التوالي

$$OM_k = |aff(M_k)| = |z_k| = \sqrt[n]{r}$$

إن النقاط M_k تنتمي إلى الدائرة التي مركزها o وشعاعها $\sqrt[n]{r}$ ولدينا:

$$\left(\overline{OM_k}, \overline{OM_{k+1}} \right) \equiv \arg(z_{k+1}) - \arg(z_k) [2\pi]$$

$$\equiv \frac{\theta}{n} + \frac{2(k+1)\pi}{n} - \frac{\theta}{n} - \frac{2k\pi}{n} [2\pi]$$

$$\equiv \frac{2\pi}{n} [2\pi]$$

إن الزاوية $\left(\overline{OM_k}, \overline{OM_{k+1}} \right)$ ثابتة.

إن النقاط M_k تكون مضلعاً منتظماً.

خاصية:

ليكن $Z = re^{i\theta}$ ($r > 0$)

صور الجذور النونية للعدد Z تكون مضلعاً منتظماً ذو n ضلع محاط بالدائرة التي مركزها o وشعاعها $\sqrt[n]{r}$.

(4) الجذور من الرتبة n للوحدة: unité

(a) **تحديد الجذور من الرتبة n للوحدة**

ليكن $z = 1$

لدينا $z = e^{i0}$

إن الجذور من الرتبة n ل 1 هي الأعداد:

$$w_k = \sqrt[n]{1} e^{\frac{i0 + 2k\pi}{n}}$$

$$w_k = e^{\frac{i2k\pi}{n}} / k \in \{0,1,\dots,(n-1)\}$$

خاصية:

الجذور من الرتبة n للعدد 1 (لوحدة) هي الأعداد:

$$w_k = e^{\frac{i2k\pi}{n}} / k \in \{0,1,\dots,(n-1)\}$$

أمثلة:

(1) الجذور المربعة للعدد 1 هي الأعداد:

$$w_k = e^{\frac{i2k\pi}{2}} = e^{ik\pi} / k \in \{0,1\}$$

هذان الجذران هما:

$$z_0 = 1(1+2i) = 1+2i$$

$$z_1 = j(1+2i) = \left(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1+2i)$$

$$z_2 = \bar{j}(1+2i)$$

(5) الجذور المربعة لعدد من \mathbb{C}^*

(a) الطريقة المثلثية:

$$\text{ليكن } Z = re^{i\theta} \quad (r>0)$$

لنحدد الجذرين المربعين ل Z .

$$z^2 = Z \Leftrightarrow z^2 = re^{i\theta}$$

$$\Leftrightarrow z^2 = (\sqrt{r})^2 \left(e^{i\frac{\theta}{2}}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = \sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}} \\ z = -\sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}} \end{cases}$$

إذن الجذران المربعان ل Z هما: $\sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}}$ و $-\sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}}$

(b) الطريقة الجبرية:

(1) إذا كان $Z = a \in \mathbb{R}_+^*$

$$Z = a = (\sqrt{a})^2 \quad \text{لدينا:}$$

إذن \sqrt{a} و $-\sqrt{a}$ هما الجذران المربعان للعدد Z :

(2) إذا كان $Z = -a (a \in \mathbb{R}_+^*)$

$$Z = -a = i^2 (\sqrt{a})^2 = (i\sqrt{a})^2$$

إذن جذرا Z هما: $i\sqrt{a}$ و $-i\sqrt{a}$

(3) إذا كان $Z = ib (b \in \mathbb{R}_+^*)$

$$Z = ib = 2i \cdot \frac{b}{2} = (1+i)^2 \left(\sqrt{\frac{b}{2}}\right)^2$$

$$= \left((1+i)\sqrt{\frac{b}{2}}\right)^2$$

إذن جذرا Z هما $(1+i)\sqrt{\frac{b}{2}}$ و $-z$

(4) إذا كان $Z = -ib (b \in \mathbb{R}_+^*)$

$$Z = -ib = -2i \cdot \frac{b}{2} = \left(\sqrt{\frac{b}{2}}\right)^2 (1-i)^2$$

$$= \left((1-i)\sqrt{\frac{b}{2}}\right)^2$$

إذن جذرا Z هما $(1-i)\sqrt{\frac{b}{2}}$ و $-z$

-2- لتكن w_k الجذور النونية ل 1:

$$w_0 + w_1 + w_2 + \dots + w_{n-1} = 1 + w_1 + w_1^2 + \dots + w_1^{n-1} \\ = \frac{(1-w_1)(1+w_1+w_1^2+\dots+w_1^{n-1})}{(1-w_1)}$$

$$= \frac{1-w_1^n}{1-w_1} = \frac{1-1}{1-w_1} = 0$$

($w_1, w_1^n = 1$ جذر نوني ل 1)

خاصية

مجموع الجذور النونية للعدد 1 منعدم.

ملاحظة:

(* إذا كان w جذر نوني للعدد 1 فإن كل من w و w^{-1} جذر نوني للعدد 1.

(* إذا كان w و w' جذرين نونيين للعدد 1 فإن كل من ww' و $\frac{w}{w'}$ جذر نوني للعدد 1.

(c) العلاقة بين الجذور النونية ل 1 والجذور النونية

لعدد من \mathbb{C}^*

ليكن Z من \mathbb{C}^*

نفترض أن $a \neq 0$ جذر نوني ل Z ($a^n = Z$)

- لتحديد الجذور الأخرى:

$$z^n = Z \Leftrightarrow z^n = a^n$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{z}{a}\right)^n = 1$$

هذا يعني أن $\frac{z}{a}$ جذر نوني ل 1

يعني: $\frac{z}{a} = w_k / k \in \{0, 1, \dots, (n-1)\}$

يعني: $z = aw_k / k \in \{0, 1, \dots, (n-1)\}$

خاصية:

ليكن Z من \mathbb{C}^* و a جذر نوني ل Z نحصل على الجذور النونية ل Z بضرب a في الجذور النونية للوحدة 1.

مثال:

أحسب $(1+2i)^3$ واستنتج الجذور من الرتبة 3 للعدد $Z = -1+2i$ لدينا:

$$(1+2i)^3 = (1+2i)^2 (1+2i) \\ = (1+4i-4)(1+2i) = 1+2i+4i-8-4-8i \\ = -11-2i$$

- لدينا $(1+2i)^3 = Z$

إذن $1+2i$ جذر من الرتبة 3 ل Z

ونعلم أن الجذور من الرتبة 3 ل 1 هي: $1, j, \bar{j}$

- إذن الجذور من الرتبة 3 ل Z هي:

خاصية:

نعتبر المعادلة $az^2 + bz + c = 0$ مع $a \neq 0$
نضع $\Delta = b^2 - 4ac$

1- إذا كان $\Delta = 0$ فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا: $z = -\frac{b}{2a}$

2- إذا كان $\Delta \neq 0$ فإن Δ يقبل جذرين مربعين u و $-u$

يكون للمعادلة حلان: $z = \frac{-b+u}{2a}$ و $z = \frac{-b-u}{2a}$

ملاحظات:

(* نعتبر المعادلة $az^2 + bz + c = 0$ مع $a \neq 0$
إذا كان z_1 و z_2 حلي المعادلة فإن:

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \\ z_1 z_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

(* نعتبر المعادلة $az^2 + 2b'z + c = 0$ مع $a \neq 0$
من أجل حل المعادلة نستعمل المميز المختصر

$$\Delta' = b'^2 - ac$$

1- إذا كان $\Delta' = 0$ المعادلة لها حل وحيد $z = -\frac{b'}{a}$

2- إذا كان $\Delta' \neq 0$ المعادلة لها حلان:

$z_1 = \frac{-b'+u}{2a}$ و $z_2 = \frac{-b'-u}{2a}$ حيث u جذر مربع Δ' .

تمرين تطبيقي:

حل في \mathbb{C} المعادلات التالية:

$$(1) \quad z^2 + z + 1 = 0$$

$$\Delta = 1 - 4 = -3 = i^2 3 = (i\sqrt{3})^2$$

إذن جذرا Δ هما $\sqrt{3}$ و $-\sqrt{3}$

$$z_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = j$$

إذن:

$$z_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = \bar{j}$$

إذن: $S = \{j, \bar{j}\}$

$$(2) \quad (2+i)z^2 - (3+2i)z + 1 - \frac{i}{2} = 0$$

$$\Delta = (3+2i)^2 - 4(2+i)\left(1 - \frac{i}{2}\right)$$

$$= -5 + 12i$$

$$= 2^2 + (3i)^2 + 2 \cdot 2 \cdot 3i$$

$$= (2+3i)^2$$

إذن جذرا Δ هما $2+3i$ و $-u$

إذن:

$$z_2 = \frac{(3+2i) + (2+3i)}{2(2+i)} ; \quad z_1 = \frac{(3+2i) - (2+3i)}{2(2+i)}$$

$$= \frac{5+5i}{2(2+i)} = \frac{(5+5i)(2-i)}{10} ; \quad = \frac{1-i}{2(2+i)} = \frac{(1-i)(2-i)}{10}$$

$$z_2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i ; \quad z_1 = \frac{1}{10} - \frac{3}{10}i$$

إذن: $S = \{z_1, z_2\}$

(5) إذا كان $Z = a + ib$ مع $(a \neq 0 \text{ و } b \neq 0)$

مثال:

لنحدد الجذرين المربعين للعدد:

$$Z = -3 + 4i$$

نضع $z = x + iy$ (مع $x, y \in \mathbb{R}$)

$$|z|^2 = x^2 + y^2 \quad \text{و} \quad x^2 - y^2 - ixy + 2$$

$$z^2 = Z \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 = Z \\ |z|^2 = |Z| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -3 & (1) \\ 2xy = 4 & (2) \\ x^2 + y^2 = 5 & (3) \end{cases}$$

من (1) + (3) نستنتج أن $2x^2 = 2$ يعني $x = 1$ أو $x = -1$

ومن (1) - (3) نستنتج أن $2y^2 = 8$

$$y^2 = 4 \quad \text{يعني}$$

$$y = 2 \quad \text{أو} \quad y = -2$$

ومن خلال (2) لدينا $xy = 2 > 0$ إذن x و y لهما نفس الإشارة

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases} \quad \text{أو} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

إذن

إذن جذرا Z هما:

$$-z \quad \text{و} \quad z = 1 + 2i$$

(VII) المعادلات من الدرجة II:

نعتبر المعادلة $az^2 + bz + c = 0$ مع $a \neq 0$
لدينا:

$$(E): az^2 + bz + c = 0$$

$$\Leftrightarrow a \left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

نضع

$$(E) \Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0$$

(* إذا كان $\Delta = 0$ فإن:

$$(E) \Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 = 0 \Leftrightarrow z = -\frac{b}{2a}$$

$$S = \left\{ -\frac{b}{2a} \right\}$$

إذن:

(* إذا كان $\Delta \neq 0$ فإن Δ يقبل جذرين مربعين u و $-u$
إذن:

$$(E) \Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{u^2}{4a^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a} + \frac{u}{2a} \right) \left(z + \frac{b}{2a} - \frac{u}{2a} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-b-u}{2a} \quad \text{أو} \quad z = \frac{-b+u}{2a}$$

لتكن $M(z)$:

$$\begin{aligned} f(M) = M &\Leftrightarrow z = az + b \\ &\Leftrightarrow z(1-a) = b \\ &\Leftrightarrow z = \frac{b}{1-a} \end{aligned}$$

إذن f يقبل نقطة صامدة وحيدة هي $\Omega(w)$ مع $w = \frac{b}{1-a}$

* لتكن $M(z)$ و $M'(z')$ من P بحيث $M \neq \Omega$

$$\begin{aligned} f(M) = M' &\Leftrightarrow z' = az + b \\ \text{ولدينا } \Omega(w) &\text{ صامدة إذن } w = aw + b \end{aligned}$$

$$b = w - aw \quad \text{يعني}$$

$$f(M) = M' \Leftrightarrow z' = az + w - aw \quad \text{إذن}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow z' - w = a(z - w) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} |z' - w| = |a(z - w)| \\ \arg(z' - w) \equiv \arg(a(z - w)) [2\pi] \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} |z' - w| = |a||z - w| \\ \arg(z' - w) \equiv \arg(a) + \arg(z - w) [2\pi] \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} |z' - w| = |z - w| \\ \arg(z' - w) - \arg(z - w) \equiv \arg(a) [2\pi] \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ \left(\overline{\Omega M}, \overline{\Omega M'} \right) \equiv \arg(a) [2\pi] \end{cases} \end{aligned}$$

إذن f دوران مركزه Ω وزاويته $\arg(a)$.

خاصية:

ليكن $a \neq 1$ و $|a| = 1$ من \mathbb{C} بحيث $a \neq 1$ و $|a| = 1$ التطبيق:

$$M(z) \rightarrow M'(z') / z' = az + b$$

دوران مركزه $\Omega(w)$ بحيث $w = \frac{b}{1-a}$ وزاويته $\arg(a)$

تمرين تطبيقي:

نعتبر التطبيق $f: P \rightarrow P$

$$M(z) \rightarrow M'(z') / z' = \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) z + 1$$

حدد طبيعة التطبيق f .
* لدينا:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \neq 1 \\ \left| \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right| = 1 \end{cases}$$

إذن f دوران مركز $\Omega(w)$ بحيث:

$$w = \frac{1}{\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}} \quad \text{أي } w = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$w = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(VIII) الدوران في المستوى:

(1) التمثيل العقدي للدوران:

ليكن R دوران مركزه $\Omega(g)$ وزاويته θ

لتكن $(M \neq \Omega)$ و $M'(z')$ بحيث $M \neq \Omega$

$$\begin{aligned} R(M) = M' &\Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ \left(\overline{\Omega M}, \overline{\Omega M'} \right) \equiv \theta [2\pi] \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} |z - w| = |z' - w'| \\ \arg \left(\frac{z' - w}{z - w} \right) \equiv \theta [2\pi] \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{|z - w|}{|z' - w'|} = 1 \\ \arg(\quad) \equiv \theta [2\pi] \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \frac{z' - w}{z - w} = e^{i\theta} \\ &\Leftrightarrow z' - w = e^{i\theta} (z - w) \\ &\Leftrightarrow z' = e^{i\theta} (z - w) + w \end{aligned}$$

نلاحظ أن هذه العلاقة تبقى صحيحة كذلك بالنسبة ل Ω .

خاصية:

ليكن R دوران مركزه $\Omega(w)$ وزاويته θ

لكل $(M \neq \Omega)$ و $M'(z')$ من P لدينا:

$$R(M) = M' \Leftrightarrow z' = e^{i\theta} (z - w) + w$$

الكتابة $z' = e^{i\theta} (z - w) + w$ تسمى التمثيل العقدي ل R .

مثال:

ليكن R دوران مركزه $\Omega(1+i)$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$

لنحدد صورة $R(1-i)$

لتكن $M(z)$ و $M'(z')$. نعم أن:

$$R(M) = M' \Leftrightarrow z' = e^{i\frac{\pi}{2}} z + (1+i) \left(1 - e^{i\frac{\pi}{2}} \right)$$

$$\Leftrightarrow z' = iz + (1+i)(1-i)$$

$$\Leftrightarrow z' = iz + 2$$

لتكن $A'(z')$ صورة $A(1-i)$

لدينا:

$$z' = i(1-i) + 2$$

$$= i + 3$$

إذن $A'(3+i)$

(2) التحويل الهندسي للتطبيق $(a \neq 1; |a| = 1)$ $z \rightarrow az - b$

نعتبر التطبيق $f: P \rightarrow P$

$$M(z) \rightarrow M'(z') / z' = az + b$$

(مع $b \neq 0$ من \mathbb{C} و $|a| = 1$ و $a \neq 1$)

لنبين أن f دوران:

* لنبحث عن النقطة الصامدة:

$$\arg\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad \text{وزاويته}$$

$$\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$$

$$= \left[1, \frac{\pi}{3}\right]$$

$$\arg\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi] \quad \text{إذن}$$

وبالتالي f دوران مركزه $\Omega\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ وزاويته $\theta = \frac{\pi}{3}$.